I Test (Algebra Lineare)

Lunedì 25 gennaio 2016

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, sia $f : \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ la funzione, definita al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (\alpha x, y + z, z)$$

(a) Dimostrare che f è un endomorfismo per qualunque valore del parametro. $\boxed{2}$

(b) Stabilire per quali valori di α la funzione f è un automorfismo. [$\alpha \neq 0$] $\boxed{2}$

(c) Al variare di α, scrivere le basi degli autospazi di f e stabilire in quali casi f è diagonalizzabile. [Per $\alpha = 1$, l'unico autovalore è 1 e il relativo autospazio è $< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$; per $\alpha \neq 1$ l'autospazio relativo all'autovalore 1 è $< (0, 1, 0) >$ e l'autospazio relativo all'autovalore α è $< (1, 0, 0) >$. In nessun caso l'endomorfismo è diagonalizzabile.] $\boxed{6}$

(d) Posto $\alpha = 0$, determinare una base per il nucleo e una per l'immagine di f. [$\operatorname{Im} f =< (0, 1, 0), (0, 1, 1) >$; $\quad \ker f =< (1, 0, 0) >$] $\boxed{2}$

(e) Posto $\alpha = 0$, stabilire se il sottospazio $Y =< (0, 2, 3), (0, 0, 1) >$ appartiene all'immagine di f e in tal caso determinare $f^{-1}(Y)$. [$Y = \operatorname{Im} f$; $f^{-1}(Y) = \mathbb{R}^3$] $\boxed{3}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali e di grado minore o uguale a tre, sono dati i sottoinsiemi:

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ : \ p(-1) = 0\}, \qquad W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ : \ p(x) = p(-x)\}.$$

(a) Stabilire se U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$; in caso di risposta affermativa, determinare le rispettive basi e dimensioni. [Sono entrambi sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$; $\mathscr{B}_U = (x^3 + 1, x^2 - 1, x + 1)$, $\dim U = 3$; $\quad \mathscr{B}_W = (x^2, 1)$, $\dim W = 2$] $\boxed{5}$

(b) Costruire un complemento diretto per $< W >$. [$< x^3, x >$] $\boxed{2}$

(c) Determinare una base per $< U > + < W >$. Stabilire se la somma è diretta e in caso di riposta negativa costruire il sottospazio $< U > \cap < W >$. [$U + W = \mathbb{R}_3[x]$, $\quad U \cap W =< x^2 - 1 >$] $\boxed{3}$

Esercizio 3. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema seguente e determinarne le soluzioni nel caso $k = 0$.

$$\begin{cases} x - (k-1)y - 3z = 0 \\ x + (k-2)z = 0 \\ y + (k-1)z = k \end{cases}$$

[Sistema compatibile per $k \neq 3$; per $k = 0$ ha ∞^1 soluzioni ($< (2,1,1) >$), per $k \neq 0, 3$ soluzione unica] $\boxed{6}$